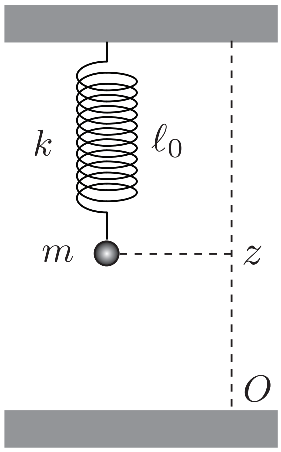
# Série 7 - Energie et stabilité

## 1 Boule suspendue à un ressort

**Objectif** : Energie, équilibre et dynamique d'une boule attachée à un ressort.

**Théorie** : 7.1 Energie potentielle et énergie mécanique ; 7.2 Equilibre et stabilité.

Une boule de masse $m$ est suspendue verticalement à un ressort de constante élastique $k$ et de longueur à vide $\ell_0$, dont le point d'attache est fixé au plafond de hauteur $h$.




(a) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle totale $V(z)$ en définissant avec soin les références d'énergie potentielle.

(b) Déterminer la position d'équilibre $z_0$ de la boule et montrer qu'elle est stable.

(c) Ecrire l'énergie mécanique totale $E(z, \dot{z})$.

(d) En déduire l'équation du mouvement de la boule.

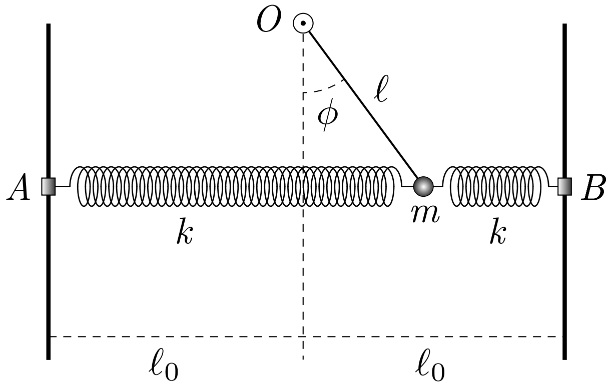
(e) Déterminer l'élongation maximale $\ell$ du ressort avec une longueur initiale $\ell_0/2$ lorsque la boule est lâchée sans vitesse initiale.

## 2 Système pendule et ressorts

**Objectif** : Energie, équilibre et dynamique d'un pendule attaché à deux ressorts identiques.

**Théorie** : 7.1 Energie potentielle et énergie mécanique ; 7.2 Equilibre et stabilité.

Un pendule mathématique de masse $m$, de longueur $\ell < \ell_0$, est lié à deux ressorts maintenus horizontaux par des liaisons coulissant sans frottement en $A$ et $B$. La constante élastique de chaque ressort vaut $k$ et leur longueur à vide $\ell_0$. Le pendule est libre de tourner entièrement, i.e. $\phi \in [0, 2\pi)$.




(a) Déterminer l'énergie potentielle totale $V(\phi)$ du système formé du pendule et des ressorts.
(b) Déterminer les quatre angles d'équilibre $\phi_0$ et discuter leur stabilité.
(c) Déterminer l'énergie mécanique $E(\phi, \dot{\phi})$ et en déduire l'équation du mouvement du pendule.
(d) Identifier la pulsation $\omega$ dans l'approximation des petites oscillations par rapport à l'angle d'équilibre stable $\phi_0 = 0$.
(e) Identifier la pulsation $\omega$ dans l'approximation des petites oscillations par rapport à l'angle d'équilibre stable $\phi_0 = \pi$ si $2k\ell > mg$.

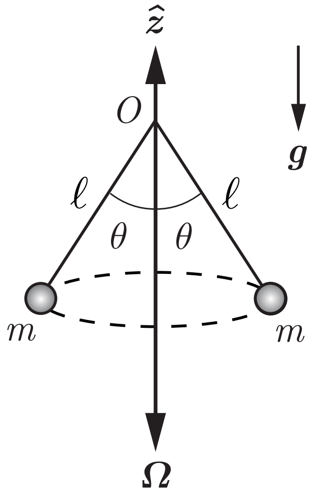
## 3 Régulateur de Watt

**Objectif** : Energie, équilibre et dynamique d'un régulateur de Watt.

**Théorie** : 7.1 Energie potentielle et énergie mécanique ; 7.2 Equilibre et stabilité.

★ **Examen** : Problème d'examen.

Un régulateur de Watt est constitué de deux boules, considérées comme des points matériels de masse identique $m$, attachés aux extrémités inférieures de deux tiges de masse négligeable et de longueur $\ell$ libres d'osciller dans un plan vertical. Les extrémités supérieures sont attachées au point fixe $O$ d'un axe de rotation vertical. Le régulateur tourne à vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\Omega} = -\Omega\,\hat{\boldsymbol{z}}$, où $\Omega > 0$, autour de l'axe de rotation vertical.



Lors de la rotation des tiges autour de l'axe vertical, un dispositif assure que les tiges se déplacent de manière symétrique par rapport à cet axe dans un plan vertical contenant l'axe. Le dispositif expérimental est tel que l'angle nodal satisfait la condition $0 < \theta < \pi/2$.

(a) Déterminer l'équation du mouvement nodal d'une boule à l'aide de la deuxième loi de Newton.

(b) Déterminer l'énergie mécanique $E\left(\theta, \dot{\theta}\right)$ de cette boule. Dans le cas général, montrer que l'énergie n'est pas conservée. Spécifier dans quel cas particulier l'énergie est conservée.

(c) Identifier la grandeur conservée $h\left(\theta, \dot{\theta}\right)$, proportionnelle à $m\,\ell^2$, en intégrant l'équation du mouvement.

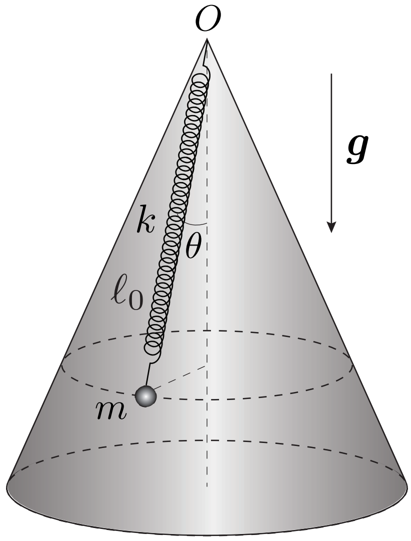
(d) Déterminer l'angle d'équilibre $\theta_0$. Discuter son existence et sa stabilité.

## 4 Boule frottant sur un cône

**Objectif** : Energie, dynamique d'un point matériel avec frottement.

**Théorie** : 7.1 Energie potentielle et énergie mécanique.

Une boule considérée comme un point matériel de masse $m$ est attachée à un ressort de constante élastique $k$ et de longueur à vide $\ell_0$. Le ressort est fixé au sommet $O$ d'un cône de demi angle d'ouverture $\theta$. La boule se déplace sans frottement sur la surface extérieure du cône. Elle subit une force de frottement visqueux $\boldsymbol{F}_f = -\,b\,\boldsymbol{v}$. On suppose que la vitesse angulaire de la boule n'est pas suffisante pour qu'elle puisse décoller.



(a) Déterminer l'énergie $E\left(r, \dot{r}, \dot{\phi}\right)$ de la boule en prenant comme référence d'énergie potentielle de pesanteur le plan horizontal qui contient le sommet $O$ du cône et comme référence d'énergie potentielle élastique l'extrémité du ressort à vide.

(b) Déterminer la dérivée temporelle de l'énergie mécanique de la boule $\dot{E}\Big(r\left(t\right), \dot{r}\left(t\right), \dot{\phi}\left(t\right)\Big)$.

(c) Calculer la puissance dissipée par frottement $P$ en termes du temps d'amortissement $\tau$ et de la pulsation $\omega_0$ définis comme,

$$\tau = \frac{m}{b} \qquad \text{et} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

(d) En déduire que le mouvement du point matériel est régie par l'équation,

$$\begin{aligned} & m\,\dot{r}\left(\ddot{r} + \frac{1}{\tau}\,\dot{r} + \omega_0^2\left(r - \,\ell_0 - \,\frac{g}{\omega_0^2}\,\cos\theta\right) - \,r\,\dot{\phi}^2\,\sin^2\theta\right) \\ & + m\,r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\left(\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} + 2\,\frac{\dot{r}}{r} + \frac{1}{\tau}\right) = 0\,. \end{aligned}$$

(e) Déterminer la coordonnée radiale d'équilibre $r_0$ compte tenu du fait que l'équation précédente doit être satisfaite pour toute valeur de la vitesse radiale $\dot{r}$.